МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ,
МИНИСТЕРСТВО НАУКИ, ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ И ИННОВАЦИЙ
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

МОО ВО Кыргызско-Российский Славянский университет
имени первого Президента Российской Федерации Б.Н. Ельцина

УТВЕРЖДАЮ
Директор
(должность)
Ергеш Г.В
(ФИО)
1 сентября____2026 г.

Специальные главы высшей математики

рабочая программа дисциплины (модуля)

Закреплена за кафедрой **Высшая школа Природопользования, мехатроники и транспорта**

Учебный план Направление 15.03.03 - РФ, 650500 - КР Прикладная механика
Профиль "Вычислительная механика и компьютерный инжиниринг"

Квалификация **бакалавр**
Форма обучения **очная**

Общая трудоемкость **3 ЗЕТ**
Часов по учебному плану 108
в том числе:
аудиторные занятия 50
самостоятельная работа 57,9

Виды контроля в семестрах:
зачет с оценкой 5

Распределение часов дисциплины по семестрам

Семестр (<Курс>.<Семестр на курсе>)	**5 (3.1)**		Итого	
Недель	17 2/6			
Вид занятий	УП	РП	УП	РП
Лекции	16	16	16	16
Практические	34	34	34	34
Контактная работа в период теоретического обучения	0,1	0,1	0,1	0,1
В том числе инт.	2	2	2	2
Итого ауд.	50	50	50	50
Контактная работа	50,1	50,1	50,1	50,1
Сам. работа	57,9	57,9	57,9	57,9
Итого	108	108	108	108

Программу составил(и):
к.ф.-м.н., Герман Константин Анатольевич

к.т.н, Джаманкулов Азамат Кенешбекович

Рецензент(ы):
к.ф.-м.н., Комарцов Никита Михайлович

д.т.н, Муслимов Аннас Поясович

Согласовано РОП:
к.ф.-м.н., Герман Константин Анатольевич

Рабочая программа дисциплины
Специальные главы высшей математики

разработана в соответствии с ФГОС 3++:

Федеральный государственный образовательный стандарт высшего образования - бакалавриат по направлению подготовки 15.03.03 Прикладная механика (приказ Минобрнауки России от 09.08.2021 г. № 729)

составлена на основании учебного плана:

Направление 15.03.03 - РФ, 650500 - КР Прикладная механика
Профиль "Вычислительная механика и компьютерный инжиниринг"
утвержденного учёным советом вуза от 26.06.2026 протокол № 11.

Рабочая программа одобрена на заседании **Высшей школы Природопользования, мехатроники и транспорта**

Протокол от 02.09.2026 г. № 1
Срок действия программы: 2026-2032 уч.г.
Руководитель подразделения: Алсеитов Мирлан Тилегенович

ЛИСТ РЕГИСТРАЦИИ ИЗМЕНЕНИЙ
к рабочей программе дисциплины (модуля)

Специальные главы высшей математики

№ п/п	Основание внесения изменения	Раздел/ пункт	Содержание изменения
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			

1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ	
1.1	Освоение и применения теории функций комплексного переменного для решения задач математической физики, двумерных задач математической теории упругости изотропных тел

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ООП	
Цикл (раздел) ООП:	Б1.В.1.ДВ.06
2.1	**Требования к предварительной подготовке обучающегося:**
2.1.1	Б1.О.3.02. Теоретическая механика
2.1.2	Б1.О.3.03. Сопротивление материалов
2.1.3	Б1.О.2.02. Математический анализ
2.1.4	Б1.О.3.12. Аналитическая механика
2.1.5	Б1.О.2.03. Линейная алгебра и аналитическая геометрия
2.1.6	Б1.О.2.04. Дифференциальные уравнения
2.1.7	Б1.О.2.05. Теория вероятностей и математическая статистика
2.1.8	Б1.О.2.06. Физика
2.1.9	Б1.О.3.13. Уравнения математической физики
2.2	**Дисциплины и практики, для которых освоение данной дисциплины (модуля) необходимо как предшествующее:**
2.2.1	Б1.В.1.02. Основы теории пластичности и ползучести
2.2.2	Б1.О.3.15. Программные системы компьютерной математики
2.2.3	Б3.О.01. Междисциплинарная итоговая государственная аттестация по национально-региональному компоненту
2.2.4	Б3.О.03. Подготовка к процедуре защиты и защита выпускной квалификационной работы
2.2.5	Б3.О.02. Подготовка к сдаче и сдача государственного экзамена
2.2.6	Б1.В.1.01. Теория упругости

3. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)	
ПК-1: Способностью применять физико-математический аппарат, теоретические, расчетные и экспериментальные методы исследования, методы математического и компьютерного моделирования в процессе профессиональной деятельности	
Знать:	
Уровень 1	Физико-математический аппарат, теоретические, расчетные и экспериментальные методы исследований, методы математического и компьютерного моделирования в процессе профессиональной деятельности;
Уровень 2	
Уровень 3	
Уметь:	
Уровень 1	Применять физико-математический аппарат, теоретические, расчетные и экспериментальные методы исследований, методы математического и компьютерного моделирования в процессе профессиональной деятельности;
Уровень 2	
Уровень 3	
Владеть:	
Уровень 1	физико-математический аппаратом для проведения исследований; навыками использования математического и компьютерного моделирования в процессе профессиональной деятельности
Уровень 2	
Уровень 3	

В результате освоения дисциплины обучающийся должен

3.1	**Знать:**
3.1.1	основные понятия теории функции комплексного переменного, такие как: комплексные числа, функции комплексного переменного, аналитические функции, рады аналитических функций, вычеты, преобразование Лапласа и операционное исчисление
3.2	**Уметь:**

3.2.1	работать с функциями комплексного переменного, уметь дифференцировать и интегрировать функции комплексного переменного; решать дифференциальные уравнения и систем дифференциальных уравнений операционным методом
3.3	**Владеть:**
3.3.1	применения методов интегрирования и дифференцирования функции комплексного переменного,
3.3.2	владеть методами операционного исчисления, использовать эти понятия и методы при решении задач, возникающих в прикладной механике.

4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Код занятия	Наименование разделов и тем /вид занятия/	Семестр / Курс	Часов	Компетен-ции	Литература	Инте ракт.	Пр. подг.	Примечание
	Раздел 1. Комплексные числа и аналитические функции. Интегральные методы и локальные представления							
1.1	Комплексные числа и элементарные функции Алгебраическая, тригонометрическая и показательная формы комплексного числа; модуль, аргумент и геометрический смысл операций. Формула Муавра, извлечение корней и расположение корней на комплексной плоскости. Комплексная экспонента и тригонометрические функции; представление гармонического движения комплексной амплитудой. Комплексный логарифм и степень; многозначность, выбор ветви и разрез области. Области на комплексной плоскости: круг, кольцо, полуплоскость; запись ограничений через модуль и аргумент. /Лек/	5	2	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
1.2	Операции с комплексными числами и извлечение корней. Области комплексной плоскости и ветви элементарных функций. /Пр/	5	4	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			

1.3	Аналитичность и гармонические функции Предел и непрерывность функции комплексного переменного; зависимость предела от направления подхода. Комплексная производная; необходимые условия Коши — Римана и достаточность при непрерывности первых частных производных в окрестности. Аналитичность в области; различие дифференцируемости в одной точке и аналитичности. Гармоничность действительной и мнимой частей аналитической функции; построение гармонически сопряжённой функции в односвязной области. Комплексный потенциал W=u+iv; уровни потенциала и линии тока, их ортогональность в регулярных точках. /Лек/	5	2	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
1.4	Проверка условий Коши — Римана и вычисление производных. Построение гармонически сопряжённой функции и линий потенциала. /Пр/	5	4	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
1.5	Контурное интегрирование и формулы Коши Кусочно-гладкий ориентированный контур; определение интеграла и переход к параметру контура. Интеграл от аналитической функции в односвязной области; теорема Коши и условия её применения. Первообразная и независимость интеграла от пути; роль односвязности на примере функции 1/z. Интегральная формула Коши для значения функции и её производных внутри контура. Вычисление интегралов по окружности; проверка положения особых точек относительно контура. /Лек/	5	2	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
1.6	Вычисление контурного интеграла параметризацией. Применение интегральной формулы Коши и формулы для производных . /Пр/	5	4	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1	2		Работа в команде

1.7	Ряды Тейлора и Лорана и особые точки Степенной ряд и радиус сходимости; связь области разложения с ближайшими особенностями. Разложение аналитической функции в ряд Тейлора; использование геометрического ряда и известных разложений. Ряд Лорана в кольце; правильная и главная части ряда, зависимость разложения от области. Устранимая особая точка, полюс и существенно особая точка; определение порядка полюса. Локальные приближения функции и контроль области их применимости при компьютерных вычислениях. /Лек/	5	2	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
1.8	Разложения Тейлора и определение радиуса сходимости. Ряды Лорана в различных кольцах и классификация особых точек. /Пр/	5	4	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
1.9	Вычеты и вычисление действительных интегралов Вычет как коэффициент при $(z-z_0)^{-1}$; вычисление по ряду Лорана. Вычеты в простом и кратном полюсе; формула отношения функций при простом нуле знаменателя. Основная теорема о вычетах; суммирование вкладов особенностей внутри положительно ориентированного контура. Вычисление несобственных интегралов рациональных функций по вещественной оси: отсутствие вещественных полюсов и оценка интеграла по большой дуге. Пример интеграла от $1/(x^2+a^2)$, $a>0$; сопоставление аналитического результата с численным интегрированием. /Лек/	5	2	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
1.10	Вычеты в простых и кратных полюсах. Несобственные действительные интегралы методом вычетов /Пр/	5	4	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			

1.11	Преобразование форм записи комплексных чисел; построение корней и областей; сравнение ветвей логарифма. Проверка аналитичности четырёх функций; восстановление сопряжённой функции; построение двух семейств линий уровня. Расчёт интеграла двумя способами; составление памятки об условиях применимости теоремы и формул Коши. Разложения одной рациональной функции в двух кольцах; оценка ошибки усечения геометрического ряда. Вычисление вычетов в полюсах разного порядка; обоснование исчезновения интеграла по большой дуге. /Ср/	5	36	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
	Раздел 2. Комплексные методы в плоских задачах механики							
2.1	Конформные отображения и потенциалы в плоских задачах Локальная конформность аналитической функции при ненулевой производной; сохранение углов и локальный масштаб. Линейное и дробно-линейное отображения; перевод верхней полуплоскости в единичный круг. Перенос гармонического потенциала при замене w=f(z); преобразование производных и ограничения около критических точек. Функция напряжений Эри: $\sigma_{xx}=\partial^2U/\partial y^2$, $\sigma_{yy}=\partial^2U/\partial x^2$, $\tau_{xy}=-\partial^2U/\partial x\partial y$; бигармоническое уравнение для однородного изотропного тела без объёмных сил. Представление U=Re[conj(z)φ(z)+χ(z)] через аналитические функции: вводная связь с комплексными методами упругости; отличие от одного гармонического потенциала. /Лек/	5	2	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
2.2	Дробно-линейные отображения круга и полуплоскости. Гармонический потенциал и простая функция напряжений Эри. /Пр/	5	4	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			

2.3	Преобразование Лапласа и восстановление оригинала Одностороннее преобразование Лапласа F(s); кусочная непрерывность, экспоненциальный порядок и полуплоскость сходимости. Табличные изображения постоянной, экспоненты, синуса и косинуса; линейность преобразования. Изображения первой и второй производных с учётом правых начальных значений. Смещение по s и запаздывание по t; функция Хевисайда и запись включаемой нагрузки. Обратное преобразование рациональных изображений: разложение на простейшие дроби и связь с вычетами; теорема о свёртке. /Лек/	5	2	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
2.4	Табличные преобразования Лапласа и область сходимости. Обратное преобразование и включаемые воздействия. /Пр/	5	4	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
2.5	Операционное решение уравнений движения и линейных систем Переход от задачи Коши для линейного ОДУ с постоянными коэффициентами к алгебраическому уравнению для изображения. Модель $m\,q''+c\,q'+kq=P(t)$: учёт начальных данных и получение переходного процесса. Нагрузка в виде включаемой ступени; использование запаздывания и принципа суперпозиции. Решение системы двух линейных ОДУ через изображения; матричная запись $(sI-A)X=x_0+F$. Передаточная функция при нулевых начальных данных, полюса и характер отклика; проверка решения подстановкой, начальными условиями и численным расчётом. /Лек/	5	2	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
2.6	Задача Коши для осциллятора операционным методом. Операционное решение системы двух линейных уравнений. Сопоставление аналитического и компьютерного решений переходного процесса . /Пр/	5	6	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			

2.7	Проверка отображения полуплоскости в круг; расчёт напряжений по заданной квадратичной функции Эри. Составление таблицы изображений; восстановление оригиналов с запаздыванием и проверка области сходимости. Подготовка расчётной работы по осциллятору: вывод решения, проверка начальных условий, график и сравнение с численным расчётом. /Ср/	5	21,9	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
2.8	Консультации и прием зачета /КрТО/	5	0,1	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			

5. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

5.1. Контрольные вопросы и задания

Вопросы текущего контроля и промежуточной аттестации

1. Как связаны формы записи комплексного числа и как вычисляются его корни?
2. Что означает выбор ветви аргумента и комплексного логарифма?
3. Как комплексная амплитуда описывает гармоническое движение?
4. Почему для существования комплексного предела необходимо рассматривать разные направления подхода?
5. Как определяется комплексная производная и формулируются условия Коши — Римана?
6. При каких дополнительных условиях уравнения Коши — Римана достаточны для аналитичности?
7. Почему действительная и мнимая части аналитической функции гармоничны?
8. Как восстановить гармонически сопряжённую функцию и какую роль играет односвязность?
9. Как параметризуется контурный интеграл и как влияет изменение ориентации?
10. Каковы условия теоремы Коши об интеграле по замкнутому контуру?
11. Как вычислять значения функции и производные по интегральной формуле Коши?
12. Почему интеграл 1/z по окружности вокруг нуля не равен нулю?
13. Как определяются коэффициенты и радиус сходимости ряда Тейлора?
14. Чем ряд Лорана отличается от ряда Тейлора и почему нужно указывать кольцо?
15. Как по главной части ряда классифицировать изолированную особую точку?
16. Как определить порядок полюса и отличить его от устранимой особенности?
17. Что такое вычет и как он связан с контурным интегралом?
18. Как вычисляется вычет в простом полюсе и в полюсе второго порядка?
19. Каковы условия основной теоремы о вычетах?
20. Когда действительный интеграл рациональной функции можно вычислить замыканием контура полуокружностью?
21. При каком условии аналитическое отображение локально конформно?
22. Как дробно-линейное отображение переводит верхнюю полуплоскость в круг?
23. Что сохраняется при конформной замене переменной для гармонического потенциала?
24. Как связаны функция Эри, напряжения и бигармоническое уравнение; почему одного гармонического потенциала недостаточно в общей задаче упругости?
25. Как определяется одностороннее преобразование Лапласа и указывается полуплоскость сходимости?
26. Как преобразуются первая и вторая производные с учётом начальных значений?
27. Чем отличаются смещение изображения и запаздывание оригинала?
28. Как применяются разложение на простейшие дроби и теорема о свёртке?
29. Как операционным методом решается задача Коши для осциллятора?
30. Как решается система линейных ОДУ в изображениях?
31. При каких начальных условиях определяется передаточная функция и как полюса связаны с откликом?
32. Как проверить аналитическое решение уравнения движения и объяснить расхождение с компьютерным результатом?

Расчётные задания

Задание 1. Вычислить (1+i)^6 и найти все корни уравнения $z^3=8$.

Задание 2. Проверить аналитичность $f(z)=x^2-y^2+2ixy$ и $g(z)=\mathrm{conj}(z)$; найти производную там, где она существует.

Задание 3. По $u=x^2-y^2$ восстановить v, если $v(0,0)=0$. Проверить гармоничность u.

Задание 4. Вычислить $\oint \mathrm{conj}(z)\,dz$ по окружности $|z|=2$ против часовой стрелки.

Задание 5. Вычислить $\oint e^z/(z-1)^2\,dz$ по $|z|=2$ против часовой стрелки.

Задание 6. Разложить $1/[(z-1)(z-2)]$ в ряд Тейлора при $z=0$ и указать радиус сходимости.

Задание 7. Разложить $1/[z(z-1)]$ в ряды Лорана для $0<|z|<1$ и $|z|>1$.

Задание 8. Классифицировать особенности при $z=0$ у $\sin(z)/z$, $1/z^3$ и $e^{(1/z)}$; вычислить их вычеты.

Задание 9. Найти вычеты $1/[(z-1)^2(z+2)]$ в точках 1 и −2.

Задание 10. Вычислить интеграл от $-\infty$ до $+\infty$ от $dx/(x^2+4)$, обосновав выбор контура и оценку дуги.

Задание 11. Для $w=(z-i)/(z+i)$ найти образ вещественной оси и точки $z=i$; установить образ верхней полуплоскости.

Задание 12. Для $U(x,y)=A\,y^2/2$ найти компоненты напряжений, проверить бигармоничность и указать нагрузки на границах прямоугольника.

Задание 13. Найти преобразование Лапласа f(t)=e^(−2t)sin(3t), t≥0, и полуплоскость сходимости.
Задание 14. Восстановить оригинал F(s)=e^(−2s)/[s(s+1)].
Задание 15. Операционным методом решить q″+2q′+5q=0, q(0)=0, q′(0)=1.
Задание 16. Операционным методом решить x′=y, y′=−x, x(0)=1, y(0)=0.

5.2. Темы курсовых работ (проектов)

Курсовых работ не предусмотрено

5.3. Фонд оценочных средств

1 Основание и предмет оценивания
Основание — предоставленная аннотация дисциплины, с. 1–2. В ней указана ПК-1: «Способностью применять физико-математический аппарат, теоретические, расчетные и экспериментальные методы исследования, методы математического и компьютерного моделирования в процессе профессиональной деятельности». Данный ФОС оценивает математическую и вычислительную составляющие ПК-1 в пределах дисциплины; экспериментальные методы отдельно не проверяются.
Ниже применяются рабочие обозначения результатов Р1–Р4. Это обозначения внутри данного проекта ФОС, не официальные индикаторы образовательной программы.
Код Наблюдаемое действие Проверка
Р1 Оперирует комплексными функциями; проверяет аналитичность и гармоничность. Тест 1–3; задания 1–3; КР1
Р2 Вычисляет контурные интегралы, ряды и вычеты с указанием областей и условий. Тест 4–7; задания 4–10; КР1 и КР2
Р3 Применяет отображение и функцию Эри в простых плоских задачах. Тест 8; задания 11–12; КР2
Р4 Решает задачи Коши операционным методом и проверяет расчёт на компьютере. Тест 9–12; задания 13–16; КР2; расчётная работа

2 Состав и организация контроля
Текущий контроль включает опрос, тест, проверку решений, две контрольные работы и расчётную работу с защитой. Контрольная работа 1 проводится после лекции 4, контрольная работа 2 — после лекции 8. Короткие проверки и письменные работы входят в практические занятия; подготовка расчётной работы — в самостоятельную работу.
Средство Содержание и объём Максимум
Опрос и решения на занятиях 8 тематических проверок, по одной на лекционную тему; каждую оценивать 0–2 балла. 16
Тест 12 вопросов с одним верным ответом, 15 минут. Сырой результат 0–12 перевести в баллы по формуле 4r/12. 4
Контрольная работа 1 4 задания по 5 баллов, 45 минут. 20
Контрольная работа 2 4 задания по 5 баллов, 45 минут. 20
Расчётная работа с защитой Аналитическая модель, решение, компьютерная проверка и объяснение; задание в разделе 6. 40

Итого текущий контроль T — 100 баллов. Для тематической проверки: 2 — корректный метод и самостоятельное объяснение; 1 — метод понятен, но есть исправимые ошибки либо объяснение дано с подсказками; 0 — метод не раскрыт. Пропущенную проверку предлагается восполнять равноценным заданием по той же теме.
Промежуточная аттестация оценивается отдельно как A по шкале 0–100, без автоматического суммирования с T. Требования допуска, пересдач и официальный способ учёта T и A необходимо установить по локальным правилам КРСУ после уточнения формы аттестации.
3 Тест текущего контроля
Выберите один ответ в каждом вопросе. За верный ответ — 1 сырой балл, за неверный или пропуск — 0. В тесте $i^2=-1$, s — переменная Лапласа; контуры ориентированы против часовой стрелки.
1. Главное значение аргумента −i при Arg∈(−π,π] равно:
А −π/2; Б π/2; В 0; Г π.
2. Функция conj(z) комплексно дифференцируема:
А всюду; Б только в нуле; В нигде; Г при Re z>0.
3. Для $u=x^2-y^2$ сопряжённая функция с v(0,0)=0:
А x^2+y^2; Б 2xy; В −2xy; Г 0.
4. Интеграл $\oint dz/z$ по |z|=1 равен:
А 0; Б 1; В πi; Г 2πi.
5. Радиус ряда Тейлора 1/(1−z) при z=0 равен:
А 1; Б 0; В 2; Г ∞.
6. Вычет e^z/z при z=0 равен:
А 0; Б −1; В 1; Г e.
7. Особенность e^(1/z) при z=0:
А устранимая; Б существенно особая; В простой полюс; Г полюс второго порядка.
8. Аналитическая функция локально конформна в точке, если:
А её значение равно нулю; Б производная равна нулю; В модуль равен единице; Г производная не равна нулю.
9. При a>0 изображение e^(−at) равно:
А 1/(s+a); Б 1/(s−a); В s+a; Г e^(−as).
10. Изображение q′(t) равно:
А sQ; Б Q/s; В sQ−q(0+); Г Q−q(0+).
11. Изображение H(t−a)g(t−a), a>0, равно:
А G(s−a); Б e^(−as)G(s); В e^(as)G(s); Г aG(s).
12. Корни знаменателя s^2+2s+5 равны:

А ±√5; Б 1±2i; В −1±i; Г −1±2i.
Ключ: 1 — А; 2 — В; 3 — Б; 4 — Г; 5 — А; 6 — В; 7 — Б; 8 — Г; 9 — А; 10 — В; 11 — Б; 12 — Г.
4 Контрольные вопросы и банк расчётных заданий
Теоретические вопросы
1. Как связаны формы записи комплексного числа и как вычисляются его корни?
2. Что означает выбор ветви аргумента и комплексного логарифма?
3. Как комплексная амплитуда описывает гармоническое движение?
4. Почему для существования комплексного предела необходимо рассматривать разные направления подхода?
5. Как определяется комплексная производная и формулируются условия Коши — Римана?
6. При каких дополнительных условиях уравнения Коши — Римана достаточны для аналитичности?
7. Почему действительная и мнимая части аналитической функции гармоничны?
8. Как восстановить гармонически сопряжённую функцию и какую роль играет односвязность?
9. Как параметризуется контурный интеграл и как влияет изменение ориентации?
10. Каковы условия теоремы Коши об интеграле по замкнутому контуру?
11. Как вычислять значения функции и производные по интегральной формуле Коши?
12. Почему интеграл 1/z по окружности вокруг нуля не равен нулю?
13. Как определяются коэффициенты и радиус сходимости ряда Тейлора?
14. Чем ряд Лорана отличается от ряда Тейлора и почему нужно указывать кольцо?
15. Как по главной части ряда классифицировать изолированную особую точку?
16. Как определить порядок полюса и отличить его от устранимой особенности?
17. Что такое вычет и как он связан с контурным интегралом?
18. Как вычисляется вычет в простом полюсе и в полюсе второго порядка?
19. Каковы условия основной теоремы о вычетах?
20. Когда действительный интеграл рациональной функции можно вычислить замыканием контура полуокружностью?
21. При каком условии аналитическое отображение локально конформно?
22. Как дробно-линейное отображение переводит верхнюю полуплоскость в круг?
23. Что сохраняется при конформной замене переменной для гармонического потенциала?
24. Как связаны функция Эри, напряжения и бигармоническое уравнение; почему одного гармонического потенциала недостаточно в общей задаче упругости?
25. Как определяется одностороннее преобразование Лапласа и указывается полуплоскость сходимости?
26. Как преобразуются первая и вторая производные с учётом начальных значений?
27. Чем отличаются смещение изображения и запаздывание оригинала?
28. Как применяются разложение на простейшие дроби и теорема о свёртке?
29. Как операционным методом решается задача Коши для осциллятора?
30. Как решается система линейных ОДУ в изображениях?
31. При каких начальных условиях определяется передаточная функция и как полюса связаны с откликом?
32. Как проверить аналитическое решение уравнения движения и объяснить расхождение с компьютерным результатом?
Задания и эталоны результатов
Эталоны предназначены для проверяющего. При выдаче студентам ключи теста и эталоны исключаются из раздаточного материала. Обозначение conj(z) означает комплексное сопряжение, H — функцию Хевисайда.
Задание 1
Вычислить (1+i)^6 и найти все корни уравнения $z^3=8$.
Эталон: (1+i)^6=−8i. Корни: 2; −1+i√3; −1−i√3.
Задание 2
Проверить аналитичность $f(z)=x^2-y^2+2ixy$ и g(z)=conj(z); найти производную там, где она существует.
Эталон: $f(z)=z^2$ аналитична на всей плоскости, f′=2z. Для g: $u_x=1$, $v_y=-1$, поэтому комплексной производной нет ни в одной точке.
Задание 3
По $u=x^2-y^2$ восстановить v, если v(0,0)=0. Проверить гармоничность u.
Эталон: v=2xy, $u_{xx}+u_{yy}=2-2=0$; $f=z^2$.
Задание 4
Вычислить $\oint$ conj(z) dz по окружности |z|=2 против часовой стрелки.
Эталон: При z=2e^(it), 0≤t≤2π, интеграл равен 8πi; теорема Коши к conj(z) неприменима.
Задание 5
Вычислить $\oint$ e^z/(z−1)² dz по |z|=2 против часовой стрелки.
Эталон: По формуле Коши для первой производной результат 2πie.
Задание 6
Разложить 1/[(z−1)(z−2)] в ряд Тейлора при z=0 и указать радиус сходимости.
Эталон: −1/(z−1)+1/(z−2)=Σ[n≥0](1−1/2^(n+1))z^n; |z|<1.
Задание 7
Разложить 1/[z(z−1)] в ряды Лорана для 0<|z|<1 и |z|>1.
Эталон: Внутри: −Σ[n≥0]z^(n−1). Снаружи: Σ[n≥0]z^(−n−2). В нуле простой полюс с вычетом −1.
Задание 8
Классифицировать особенности при z=0 у sin(z)/z, $1/z^3$ и e^(1/z); вычислить их вычеты.
Эталон: Устранимая, вычет 0; полюс третьего порядка, вычет 0; существенно особая, вычет 1 соответственно.
Задание 9
Найти вычеты 1/[(z−1)²(z+2)] в точках 1 и −2.
Эталон: Res в 1: производная 1/(z+2) при z=1 равна −1/9. Res в −2 равен 1/9.

Задание 10
Вычислить интеграл от −∞ до +∞ от dx/(x²+4), обосновав выбор контура и оценку дуги.
Эталон: В верхней полуплоскости полюс 2i, вычет 1/(4i); интеграл π/2. На дуге радиуса R>2 оценка не превосходит πR/(R²−4)→0.
Задание 11
Для w=(z−i)/(z+i) найти образ вещественной оси и точки z=i; установить образ верхней полуплоскости.
Эталон: Вещественная ось переходит в единичную окружность без точки w=1 для конечных z; z=i переходит в 0. Для Im z>0 имеем |w|<1.
Задание 12
Для U(x,y)=A y²/2 найти компоненты напряжений, проверить бигармоничность и указать нагрузки на границах прямоугольника.
Эталон: σxx=A, σyy=τxy=0; Δ²U=0. На вертикальных гранях t=(±A,0), на горизонтальных t=0; объёмных сил нет.
Задание 13
Найти преобразование Лапласа f(t)=e^(−2t)sin(3t), t≥0, и полуплоскость сходимости.
Эталон: F(s)=3/[(s+2)²+9], Re s>−2.
Задание 14
Восстановить оригинал F(s)=e^(−2s)/[s(s+1)].
Эталон: f(t)=H(t−2)[1−e^(−(t−2))]. Значение в точке включения на преобразование не влияет.
Задание 15
Операционным методом решить q″+2q′+5q=0, q(0)=0, q′(0)=1.
Эталон: Q(s)=1/[(s+1)²+4]; q(t)=0,5e^(−t)sin(2t). Полюса −1±2i; колебания затухают.
Задание 16
Операционным методом решить x′=y, y′=−x, x(0)=1, y(0)=0.
Эталон: sX−1=Y, sY=−X. X=s/(s²+1), Y=−1/(s²+1); x=cos t, y=−sin t.
5 Контрольные работы
Контрольная работа 1
Темы: комплексные функции, аналитичность, интегрирование, ряды. 45 минут; четыре задания по 5 баллов. Вариант А: задания 2, 4, 5, 6 банка. Вариант Б приведён ниже.
1. Для f=x²−y²+3ixy проверить условия Коши — Римана, определить точки дифференцируемости и наличие области аналитичности. Эталон: условия выполняются только в (0,0), производная там равна 0; области аналитичности нет.
2. Вычислить ∮ conj(z) dz по |z|=1 против часовой стрелки. Эталон: 2πi.
3. Вычислить ∮ cos(z)/(z−1) dz по |z|=2 против часовой стрелки. Эталон: 2πi cos(1).
4. Разложить 1/(3−z) в ряд Тейлора в нуле и указать радиус. Эталон: Σ[n≥0]z^n/3^(n+1), |z|<3.
Контрольная работа 2
Темы: вычеты, простые приложения к механике, преобразование Лапласа и ОДУ. 45 минут; четыре задания по 5 баллов. Вариант А: задания 9, 12, 14, 15 банка. Вариант Б приведён ниже.
1. Найти вычет 1/[(z−2)²(z+1)] при z=2. Эталон: −1/9.
2. Для U(x,y)=B x²/2 определить напряжения и нагрузки на границах прямоугольника. Эталон: σxx=0, σyy=B, τxy=0; на горизонтальных гранях t=(0,±B), на вертикальных t=0; Δ²U=0.
3. Найти оригинал F(s)=e^(−s)/[s(s+2)]. Эталон: H(t−1)[1−e^(−2(t−1))]/2.
4. Решить q″+4q′+8q=0, q(0)=0, q′(0)=1. Эталон: Q=1/[(s+2)²+4]; q=e^(−2t)sin(2t)/2.
Критерии проверки одного задания
5 баллов: верный выбор метода, проверены условия, выполнены вычисления и контроль результата. 4: решение по существу верно, есть небольшая арифметическая ошибка или неполная проверка. 3: метод верен, но вычисления завершены частично; основные переходы понятны. 2: записан обоснованный начальный этап решения. 1: приведена относящаяся к задаче формула без её применения. 0: решения по существу нет. Баллы выставляются за показанный ход решения; ошибка на раннем шаге не обнуляет последующие корректные действия.
6 Индивидуальная расчётная работа
Тема: переходный процесс одномассовой механической системы при включении постоянной силы. Выполнить один из двух вариантов, назначенный преподавателем. Время выполнения включено в 8,9 часа самостоятельной работы по лекции 8.
Модель: m q″+c q′+kq=P₀H(t−a), q(0)=q′(0)=0. Система линейная, параметры постоянны, t≥0. Использовать СИ.
Вариант m, кг c, Н·с/м k, Н/м P₀, Н a, с Интервал, с
А 1 2 5 1 1 0–10
Б 1 4 8 2 2 0–10

• Получить Q(s)=P₀e^(−as)/[s(ms²+cs+k)] и указать полюса механической передаточной функции.
• Найти q(t) обратным преобразованием Лапласа; отдельно описать участки до и после включения силы.
• Проверить начальные условия, непрерывность q и q′ в t=a и выполнение ОДУ при t≠a; проверить установившееся значение.
• Рассчитать решение численно, разделив интервал в момент t=a; использовать не менее 1001 общей точки сравнения. Например, задать относительную точность 10^(−8) и абсолютную 10^(−10) для координаты в метрах.
• Построить график q(t) в метрах; вычислить максимальную абсолютную ошибку на общей сетке. Объяснить влияние демпфирования на вид отклика и оценить причины расхождений.
Оформление: 3–5 страниц с постановкой, формулами, проверками и графиком плюс файл расчёта. Допускается Python либо доступная эквивалентная среда. Автоматический вывод системы компьютерной математики сопровождается объяснением преобразований.
Эталон расчётной работы

Вариант А: при $\tau = t-1 \ge 0$ $q(t) = [1 - e^{-\tau}(\cos(2\tau) + 0{,}5\sin(2\tau))]/5$; до $t=1$ $q=0$. Полюса передаточной функции $-1 \pm 2i$; $q(\infty) = 0{,}2$ м.
Вариант Б: при $\tau = t-2 \ge 0$ $q(t) = [1 - e^{-2\tau}(\cos(2\tau) + \sin(2\tau))]/4$; до $t=2$ $q=0$. Полюса $-2 \pm 2i$; $q(\infty) = 0{,}25$ м.
У обоих вариантов $q(a) = q'(a) = 0$, скачок q'' равен P_0/m. В точке включения дифференциальное уравнение интерпретируется через односторонние пределы; выбор $H(0)$ не влияет на решение для $t \ne a$. Для образа решения при нулевых данных полуплоскость сходимости $\mathrm{Re}\, s > 0$; полюс $s=0$ связан со ступенчатой нагрузкой.
Критерий Макс.
балл Основание снижения
Постановка и единицы 5 Не указаны параметры, сила или начальные данные.
Операционное уравнение 8 Потеря множителя запаздывания, неверный знаменатель.
Восстановление оригинала 8 Ошибки разложения, коэффициентов или аргумента τ.
Аналитическая проверка 7 Не проверены ОДУ, начальные условия или поведение в момент включения.
Численное сравнение и график 7 Нет общей сетки, меры ошибки, единиц или воспроизводимого расчёта.
Самостоятельное объяснение 5 Студент не может объяснить ключевые переходы и результат.

Каждый критерий оценивается от 0 до указанного максимума: 100% — выполнен полностью; около 75% — есть небольшие недочёты; около 50% — существенная часть выполнена верно; около 25% — показаны только начальные действия; 0 — подтверждения нет. Итог по критерию округляется до целого, итог работы — сумма по шести критериям.
Вопросы защиты: почему в $Q(s)$ возникает e^{-as}; чем полюса передаточной функции отличаются от полюсов $Q(s)$; почему q и q' непрерывны; почему $q(\infty) = P_0/k$; как уменьшение допуска численного решателя влияет на ошибку сравнения.
7 Промежуточная аттестация
Предлагаемый единый письменный формат: 60 минут, два теоретических вопроса и две задачи; затем при необходимости краткое уточняющее собеседование без новых баллов. Банк — раздел 4. Конкретная форма (зачёт, зачёт с оценкой либо экзамен) устанавливается учебным планом, которого в исходных материалах нет.
Каждый комплект включает один вопрос по комплексному анализу, один по операционному исчислению, одну задачу по комплексному анализу или плоским приложениям и одну по Лапласу или ОДУ. Это сохраняет одинаковую структуру охвата тем.
Комплект Теоретические вопросы Расчётные задания
1 5 и 26 5 и 15
2 14 и 27 9 и 14
3 19 и 29 10 и 16
4 24 и 30 12 и 15

Номера относятся к банку раздела 4. Комплекты предназначены для выдачи студентам без эталонов. Условия задач и номера вопросов переносятся в индивидуальный лист полностью, чтобы не требовать обращения к банку во время работы.
Оценивание письменного ответа
Теоретический вопрос — до 20 баллов: определение и формулировка — 8, условия применимости — 6, связное объяснение или краткий пример — 6. Две теории дают 40 баллов.
Расчётная задача — до 30 баллов: постановка и выбор метода — 6, корректное применение формул и условий — 10, вычисления — 8, проверка и интерпретация — 6. Две задачи дают 60 баллов. В каждом элементе начисляется от 0 до максимума пропорционально полноте показанных правильных действий; один и тот же дефект не штрафуется повторно в зависимых шагах.
Баллы А Проект соответствия оценке Описание
85–100 Отлично Методы применяются самостоятельно, результат обоснован и проверен.
70–84 Хорошо Основные действия верны, отдельные недочёты не меняют понимания метода.
55–69 Удовлетворительно Базовый метод освоен, имеются существенные пробелы в обосновании или вычислениях.
0–54 Неудовлетворительно Не подтверждено освоение базовых методов курса.

При форме «зачёт» предлагается порог $A \ge 55$. Для положительного результата дополнительно требуется не менее 10 из 30 баллов за каждую задачу, чтобы подтвердить владение обеими группами методов. При невыполнении этого условия положительная оценка не выставляется независимо от общей суммы. Эти пороги — предложение для согласования, не выписка из правил университета.
8 Условия выполнения и обратная связь
Для теста и контрольных работ допускается обычный калькулятор; система компьютерной алгебры не применяется. На итоговой письменной работе предлагается выдавать одинаковый для всех краткий лист формул: условия Коши — Римана, формулы Коши и вычетов, таблица базовых изображений Лапласа. Точные условия задачи и обоснование выбора метода студент устанавливает самостоятельно.
Для расчётной работы компьютерная среда обязательна; принимается исходный расчёт с параметрами и командами. После проверки преподаватель указывает ошибочный переход, его причину и тему для повторения. Для повторной проверки подбирается равноценная задача с изменёнными данными по тому же методу.
Порядок оценивания, разрешённые средства и сроки сообщаются обучающимся до выполнения работ. При необходимости особые условия выполнения определяются по правилам университета с сохранением проверяемого математического содержания.

5.4. Перечень видов оценочных средств

Устный опрос по определениям, условиям теорем и смыслу результатов.
Короткий тест с выбором ответа и краткими вычислениями.
Проверяемые решения задач на практических занятиях.

Две письменные контрольные работы по основным методам курса.
Индивидуальная расчётная работа с аналитической и компьютерной проверкой.
Собеседование при защите расчётной работы.
Итоговая письменная работа с теоретическими вопросами и расчётными заданиями; формат применяется после уточнения формы аттестации.

6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

6.1. Рекомендуемая литература

6.1.1. Основная литература

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год
Л1.1	В.И. Афанасьев, О.В. Зимина, А.И. Кириллов и др.	Высшая математика.Специальные разделы: учебное пособие	М.: ФИЗМАТЛИТ 2003

6.1.2. Дополнительная литература

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год
Л2.1	Сорокин А.А., Сологубова Т.И., Тупеев И.Р.	Высшая математика: учебное пособие	Бишкек: Изд-во КРСУ 2013

6.1.3. Методические разработки

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год
Л3.1	Алексеенко С.Н.	Комплексные числа и функции комплексной переменной: учебно-методическое пособие	Бишкек: Изд-во КРСУ 2001

6.3. Перечень информационных и образовательных технологий

6.3.1 Компетентностно-ориентированные образовательные технологии

6.3.1.1	Python с SymPy — символьное дифференцирование, ряды, вычеты, преобразование Лапласа и обратное преобразование. Документация: https://docs.sympy.org/latest/modules/integrals/integrals.html
6.3.1.2	Python с NumPy, SciPy и Matplotlib — работа с комплексными массивами, численное интегрирование, решение ОДУ и построение графиков. Документация SciPy: https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/integrate.html
6.3.1.3	GNU Octave — альтернативная среда для матричных расчётов, комплексной арифметики и визуализации; символьные возможности требуют дополнительного пакета. Официальный сайт: https://octave.org/
6.3.1.4	MATLAB с Symbolic Math Toolbox — альтернативная среда для символьных преобразований и проверки решений при наличии лицензии на соответствующие продукты. Документация: https://www.mathworks.com/help/symbolic/sym.laplace.html

6.3.2 Перечень информационных справочных систем и программного обеспечения

6.3.2.1	Math-Net.Ru — профессиональный математический портал: поиск публикаций по комплексному анализу, математической физике и механике. https://www.mathnet.ru/
6.3.2.2	zbMATH Open — библиографическая и реферативная база математических исследований; поиск литературы по теме, автору и предметной классификации. https://zbmath.org/
6.3.2.3	NIST Digital Library of Mathematical Functions — справочная система по математическим функциям, формулам и комплексному анализу; для курса полезны разделы 1.9–1.10. https://dlmf.nist.gov/

7. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

8. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Подготовка к освоению курса
Повторите операции с комплексными числами, частные производные, криволинейные интегралы, степенные ряды и решение линейных ОДУ. При пробелах сначала разберите по одному простому примеру каждого типа, затем переходите к теме лекции.
Работа с лекционным материалом
Для каждого нового метода фиксируйте определение, условия применимости и один разобранный пример. Отдельно записывайте, где функция аналитична, как ориентирован контур и какую ветвь многозначной функции вы используете. После лекции восстановите основные переходы без обращения к записи.
Решение задач комплексного анализа
Начинайте с области определения и положения особых точек. При проверке аналитичности вычисляйте обе пары частных производных. Для рядов сначала указывайте центр и кольцо сходимости. Для интеграла выбирайте параметризацию, формулу Коши или вычеты только после проверки их условий.
Применение к плоским задачам
Различайте гармонический потенциал и бигармоническую функцию Эри. Перед вычислением напряжений укажите принятую систему координат и знаки касательных напряжений. После дифференцирования проверьте уравнения

равновесия и вектор поверхностной нагрузки t=σn. Конформное отображение само по себе не заменяет постановку граничных условий упругости.

Операционное исчисление

Используйте одностороннее преобразование Лапласа. До преобразования запишите начальные значения и способ включения нагрузки; после преобразования проверьте знаки начальных слагаемых. При обратном переходе контролируйте множители запаздывания и форму H(t−a)g(t−a). В конце подставьте результат в исходное уравнение и проверьте начальные условия.

Самостоятельная работа

Распределяйте время по тематическому перечню. Сначала решайте задачу вручную, затем используйте систему компьютерной математики для проверки. Ведите список ошибок: пропущенная особая точка, неверный знак обхода, потерянная константа, неверная ветвь или начальное условие. Исправляйте задачу полностью, а не только конечный ответ.

Компьютерная проверка

Задавайте предположения о параметрах и областях переменных. Для символьного результата вычисляйте невязку и начальные значения; для численного — сравнивайте решения на общей сетке и указывайте настройки точности. График без формулы, единиц измерения и описания параметров не является достаточным обоснованием.

Оформление и защита расчётной работы

Представьте модель, параметры с единицами, преобразование Лапласа, восстановленный оригинал, проверку и график. Приложите исполняемый файл расчёта или текст команд с указанием среды. На защите объясните выбор метода, влияние демпфирования и причину возможного расхождения аналитического и численного результатов.

Подготовка к промежуточной аттестации

По каждому вопросу подготовьте короткий ответ с условиями применимости. Решите без подсказок хотя бы одну задачу на аналитичность, контурный интеграл, ряд, вычет и преобразование Лапласа. Проверяйте область сходимости и начальные данные столь же внимательно, как вычисления.